Institut National Polytechnique

Cycle Préparatoire - 1ère année

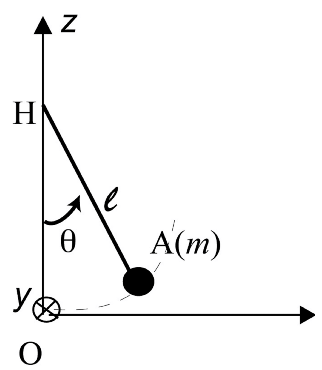
Examen de rattrapage de Mécanique 1 du 6 mai 2010, durée : 1 h 30

Aucun document n'est autorisé ; les calculatrices sont interdites.

On rappelle que les correcteurs sont sensibles à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel, en aucun cas, ne doit être télégraphique. En outre, conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras.

A Pendule simple (13 points)

Dans un référentiel terrestre galiléen *R(Oxyz)*, où (Oz) est selon la verticale ascendante, on considère un pendule simple formé d'une masselotte A, de masse m = 30 g, suspendue à l'extrémité d'un fil rigide de longueur l = 15 cm, l'autre extrémité du fil tant fixée en H au bâti lié au référentiel R (voir figure ci-dessous). Dans le plan vertical du mouvement (xOz), la position de A est repérée par l'angle $\theta = (\text{-}\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{HA})$. On désigne par h la distance OH telle que $h = l$. On note $\boldsymbol{g} = \text{-}g\ \boldsymbol{e}_z$ le champ de pesanteur terrestre avec g = 9,81 m.s^{-2}.



Préambule : Déterminer, en fonction de l et θ les composantes des vecteurs vitesse $\boldsymbol{v}_{A/R}$ et accélération $\boldsymbol{a}_{A/R}$ dans la base cylindrique définie par $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta, \text{-}\boldsymbol{e}_y)$ avec $\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{HA}/HA$.

PARTIE I : Dynamique en référentiel galiléen

1. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur A et les expliciter dans la base cylindrique.

2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle du mouvement en θ.

3. Déterminer l'expression de la période T_0 des oscillations dans le cas des petits mouvements. Application numérique : calcul de T_0.

PARTIE II : Dynamique en référentiel non galiléen

4. Le référentiel R_1, d'origine O_1, lié au pendule par rapport auquel on étudie le mouvement, est maintenant en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre R, suivant l'axe des x avec $\boldsymbol{a}_{O_1/R} = a_0\ \boldsymbol{e}_x$.

a) Déterminer les composantes, dans la base cylindrique, des forces d'inertie.

b) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, trouver l'équation du mouvement en θ, par rapport à R_1. Que devient cette équation dans le cas des petits mouvements ?

c) Déterminer le moment des forces en H.

d) Déterminer le moment cinétique de A en H.

e) En appliquant le théorème du moment cinétique en H, déterminer l'équation différentielle du mouvement.

f) En déduire, dans le cas des petites oscillations, la période T_1 du mouvement. Comparer T_0 et T_1, et commenter le résultat obtenu.

B. Énergie d'une particule sur une ellipse (7 points)

Une particule M de masse m décrit la trajectoire elliptique d'excentricité e, de demi-axes a et b, de centre O, et d'équation $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{r} = a \cos(\omega t)\, \boldsymbol{i} + b \sin(\omega t)\, \boldsymbol{j}$. Les vecteurs $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ désignent les vecteurs unitaires dans le repère cartésien (Oxy) orthonormé tandis que a, b et ω sont des constantes.

1. a) Montrer que la résultante $\boldsymbol{F}$ des forces agissant sur M dérive d'une énergie potentielle ϵ_p que l'on déterminera en fonction de m, ω et $r = OM$. On prendra $\epsilon_p(r = 0) = 0$.

b) En déduire le travail de $\boldsymbol{F}$ lorsque la particule se déplace de M_1 $(OM_1 = r_1)$ vers M_2 $(OM_2 = r_2)$.

2. Montrer que l'énergie mécanique totale est conservée.

3. Déterminer les instants où l'énergie se répartit en quantités égales sous forme cinétique et sous forme potentielle.